Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Faculdade de Matemática - FAMAT

Coordenação dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Lineabilidade em conjuntos de sequências e de funções

Aluna: Kauane de Araujo Silva

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro

Kauane de Araujo Silva

Lineabilidade em conjuntos de sequências e de funções

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em matemática

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro

Uberlândia-MG

2019

Kauane de Araujo Silva

Lineabilidade em conjuntos de sequências e de funções

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em matemática

Trabalho aprovado. Uberlândia-MG, **12 de julho de 2019**:

VVFávaro

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro
Orientador

Elisa Regina dos Santos.

Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos

Lúcia Resende Pereira

Profa. Dra. Lúcia Resende Pereira

Uberlândia-MG
2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua infinita bondade e misericórdia, por todas as noites de choro e dificuldades em que eu sei que estava comigo me protegendo, por todo amor e cuidado que sempre me sustentou nos momentos difíceis e me ajudou a superá-los.

Agradeço aos meus pais, Adriana e Valcimar, e ao meu irmão Gustavo por serem meu apoio e minha segurança. Por todas as vezes que cheguei cansada ou triste e me acolheram com todo o amor e carinho. Me apoiando nos meus planos e nunca me deixando desistir pelas dificuldades. Obrigada pela luta e dedicação durante toda a minha vida, em especial nesse período tão exaustivo... Vocês são tudo para mim e tudo o que eu sou é por vocês!

Agradeço a toda a minha família que contribuiu comigo nesses anos, por todas as conversas incentivadoras e conselhos. A todos os meus tios, primos e amigos, em especial à Dimarcy e Francisco, que mesmo antes de saberem o que eu queria fazer me apoiaram e sempre estiveram acessíveis pra mim e meus problemas. A todas as minhas queridas primas que caminharam junto comigo e me ajudaram a distrair dos problemas e enxergar o lado positivo de todas as situações.

Agradeço ao meu namorado Christopher por ser meu porto seguro! Por todas as vezes que me incentivou a não desistir e lutar um pouco mais. Obrigada por estar comigo nos momentos mais difíceis da minha vida, me ajudando e alegrando independente das notícias. Você foi o melhor presente que eu tive durante minha graduação e sem você não sei se seria capaz de passar por tudo isso sozinha. Agradeço por toda ajuda em aulas, trabalhos e estudos. Nunca imaginaria que iria encontrar o meu grande amor na minha turma de graduação...

Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Matemática por minha formação acadêmica, por me apresentar os melhores professores que eu poderia ter e pelos amigos que fiz durante todos esses anos.

Agradeço a cada professor que tive contato por toda dedicação e ensinamento. Em especial, à professora Lígia Laís Fêmina por ceder muito do seu tempo para me ajudar neste trabalho e por me aconselhar e conversar sobre o meu futuro acadêmico.

Agradeço ao professor Daniel Cariello, um dos melhores professores que já tive e que me mostrou como é gostar de matemática e se entusiasmar com livros bons.

Agradeço aos coordenadores do curso de matemática Dylene Agda Souza de Barros e Germano Abud de Rezende que me ajudaram muito durante todos os esses anos de curso e sem dúvidas fizeram toda a diferença em minha formação.

Agradeço ao Vinícius Vieira Fávaro por ser o melhor professor e orientador que eu poderia ter! Por todos os anos de iniciações científicas, pela amizade, pelas conversas, pelos conselhos e incentivos. Obrigada por todo tempo cedido às minhas dúvidas, por toda compreensão e dedicação a este trabalho.

Agradeço às professoras Elisa Regina dos Santos e Lúcia Resende Pereira por serem ótimas professoras, sempre prontas a ajudar e por aceitarem participar da minha banca.

Agradeço a todos que me ajudaram de forma direta ou indireta neste trabalho e na minha graduação!

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."

Galileu Galilei

Resumo

Neste trabalho provaremos que o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que são sobrejetoras em todo lugar é lineável e que os conjuntos de sequências $\ell_p - \ell_q$, se $p > q \geq 1$, e $\ell_\infty - c_0$ são espaçáveis.

Palavras-chave: Lineabilidade, espaçabilidade, espaços de Banach, espaços de sequências, funções sobrejetoras em todo lugar.

Abstract

In this work we prove that the set of everywhere surjective functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is lineable and the sequence sets $\ell_p - \ell_q$, if $p > q \geq 1$, and $\ell_\infty - c_0$ are spaceable.

Keywords: Lineability, spaceability, Banach spaces, sequence spaces, everywhere surjective functions.

Sumário

Introdução

O estudo de lineabilidade e espaçabilidade na Análise Funcional tomou enormes proporções nos últimos 15 anos. Diversos pesquisadores nos mais diferentes contextos da Análise Matemática passaram a explorar a busca por linearidade em ambientes em que, a princípio, não se tem uma estrutura linear. A longa lista de referências do livro [1], intitulado *Lineability The Search for Linearity in Mathematics*, publicado em 2015, mostra a vitalidade do assunto. O termo *lineabilidade* foi introduzido por Gurariy no início dos anos 2000 e sua definição precisa é a seguinte:

Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que $A \subset E$ é λ-*lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão λ (aqui λ pode ser um número natural ou um cardinal transfinito). É usual também dizer apenas que A é *lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita.

Uma condição mais forte que, além da estrutura algébrica de espaço vetorial se preocupa também com uma estrutura topológica, é a seguinte:

Dizemos que $A \subset E$ é *espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita e fechado em E.

O estudo de lineabilidade/espaçabilidade é feito em diversos contextos na Análise Matemática, principalmente dentro da teoria de Análise Funcional. Muitos desses estudos envolvem técnicas extremamente complexas e elaboradas, e de conteúdo matemático aprofundado. Nesse trabalho, o nosso foco principal é o estudo de lineabilidade em espaços clássicos de sequências estudados em cursos introdutórios de Análise Funcional e no espaço de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Os dois problemas centrais são os seguintes:

Problema 1: Existe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tem-se $f((a,b)) = \mathbb{R}$?

É impossível imaginar o gráfico de uma função satisfazendo essa condição. Mas de fato existem funções deste tipo e em inglês elas são chamadas de *everywhere surjective functions*. Podemos pensar que funções com esse comportamento não usual são raras de se existir, mas pretendemos convencê-los que estas funções não são tão raras assim. Denotaremos o conjunto de todas essas funções por $ES(\mathbb{R})$. Baseado na afirmação que fizemos de existência de funções com essa propriedade, segue que $ES(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Logo, é natural se perguntar se esse conjunto é lineável, isto é, existe um espaço vetorial (a menos da função nula) somente de funções que estão em $ES(\mathbb{R})$? Repare que essa pergunta é não trivial, pois o conjunto $ES(\mathbb{R})$ é altamente não linear, já que somando duas funções de $ES(\mathbb{R})$ podemos obter, por exemplo, uma função nula, ou uma função constante qualquer. E se esse conjunto for lineável, qual é o "tamanho máximo"do espaço vetorial que conseguimos criar com funções de $ES(\mathbb{R})$ (em termos de dimensão algébrica)?

Vamos as respostas. De fato o conjunto $ES(\mathbb{R})$ é lineável e o que é mais surpreendente é que é possível criar um espaço vetorial somente com funções de $ES(\mathbb{R})$ (exceto pela função nula) cuja dimensão é $2^{\mathfrak{c}}$, onde $\mathfrak{c}$ denota a cardinalidade dos números reais. Ou seja, a dimensão do espaço criado coincide com a cardinalidade do conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

A resposta original para esse problema foi dada por Aron, Gurariy e Seoane em [2], em 2005, e uma prova alternativa deste resultado foi obtida por Cariello, Fávaro e Seoane em [5].

Problema 2: Seja $p \geq 1$ e considere o espaço vetorial de todas as sequências de números reais (ou complexos) que são absolutamente p-somáveis, isto é, o conjunto

$$\ell_p = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\},$$

o qual se torna um espaço normado com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

É possível provar que se $1 \leq q < p$, então $\ell_q \subset \ell_p$ e essa inclusão é própria, ou seja, $\ell_p - \ell_q \neq \emptyset$ (as demonstrações desses fatos aparecerão no Capítulo 3).

Mas existem muitos elementos no conjunto $\ell_p - \ell_q$? Será que $\ell_p - \ell_q$ é um espaço vetorial, ou pelo menos é lineável? Será que é espaçável?

Vamos as respostas. De fato o conjunto $\ell_p - \ell_q$ está longe de ser um espaço vetorial, pois não contém nenhuma sequência finita (que é 0 a partir de um certo termo). Ou seja, esse conjunto é altamente não linear. Mas é possível provar que $\ell_p - \ell_q$ é espaçável, em particular lineável.

O mesmo tipo de pergunta pode ser feita para $\ell_\infty - c_0$, onde ℓ_∞ é o espaço normado de todas as sequências limitadas de números reais com a norma do supremo e c_0 é o subespaço fechado de ℓ_∞ das sequências que convergem para zero.

As demonstrações desses fatos podem ser encontradas em [3, 9]. Nos baseamos nelas para a construção deste trabalho.

1 Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados importantes da teoria axiomática de conjuntos e algumas propriedades do conjunto de Cantor que serão necessárias no Capítulo 2. No que diz respeito à teoria axiomática de conjuntos, o foco principal será em resultados sobre *números cardinais*. Apresentaremos também alguns conceitos básicos de espaços métricos que serão necessários no Capítulo 3.

1.1 Números Cardinais

Para se dar a definição rigorosa de cardinal é necessário apresentar diversos axiomas e desenvolver vários resultados, principalmente da teoria de ordinais. Como estamos interessados em saber apenas a cardinalidade de alguns conjuntos específicos, optamos por não fazer esse desenvolvimento teórico detalhado da formalização da definição de cardinais. Apesar de não definirmos com rigor os números cardinais, usaremos a ideia central desse conceito que é a de medir o tamanho de conjuntos, em termos da quantidade de elementos que eles possuem. Como os autores do livro [1] dizem: *Os números cardinais são em certo sentido, uma extensão dos números naturais e a aritmética cardinal é a extensão da aritmética básica dos números naturais aos cardinais.* Admitiremos a convenção que a cada conjunto A está associado um número cardinal denotado $card(A)$, que mede a quantidade de elementos do conjunto A.

Definição 1. Sejam A e B dois conjuntos. Diremos que:

a) $card(A) \leq card(B)$ (ou simplesmente $A \preccurlyeq B$) se existe uma aplicação $f : A \to B$ injetora.

b) $card(A) \geq card(B)$ (ou $A \succcurlyeq B$) se existe uma aplicação $f : A \to B$ sobrejetora

c) $card(A) = card(B)$ (ou $A \approx B$) se existe uma aplicação $f : A \to B$ bijetora.

d) $card(A) < card(B)$ (ou $A \prec B$) se $card(A) \leq card(B)$ e não existe uma aplicação $f : A \to B$ bijetora.

e) $card(A) > card(B)$ (ou $A \succ B$) se $card(A) \geq card(B)$ e não existe uma aplicação $f : A \to B$ bijetora.

f) $card(A)$ é *finito* se A é um conjunto finito, caso contrário é chamado de *infinito*.

g) $card(A)$ é *enumerável* se $card(A) = card(\mathbb{N})$.

Observação 2. Em geral, usaremos também letras gregas minúsculas para denotar números cardinais. Como é usual, denotaremos

$$card(\mathbb{N}) = \aleph_0, \qquad card(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

Definição 3. Sejam A e B dois conjuntos. Denotamos por ${}^{A}B$ o conjunto de todas as funções de A em B, isto é,

$${}^{A}B = \{f\colon A \longrightarrow B\}.$$

Teorema 4 (Teorema de Cantor)**.** *Seja A um conjunto. Então $A \prec \mathcal{P}(A) \approx {}^{A}\{0,1\}$, onde $\mathcal{P}(A)$ denota o conjunto das partes de A.*

Demonstração. Considere uma função $f\colon A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ e suponhamos por absurdo que f seja uma função bijetora. Assim, podemos definir o conjunto

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Observe que $B \subseteq A$ e portanto é um elemento de $\mathcal{P}(A)$. Como f é bijetora existe $a \in A$ tal que $f(a) = B$. Agora, $a \in A$ e $a \in B$ se, e somente se, $a \notin f(a) = B$, o que é um absurdo. Portanto, segue da Definição 1(e) que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Mostraremos a seguir que $\mathcal{P}(A) \approx {}^{A}\{0,1\}$. Para isso vamos considerar a função característica de cada subconjunto C de A, $\chi_C\colon A \longrightarrow \{0,1\}$ dada por

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in C \\ 0, & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

Observe que $\chi_C \in {}^{A}\{0,1\}$. Defina agora $g\colon \mathcal{P}(A) \longrightarrow {}^{A}\{0,1\}$, por $g(C) = \chi_C$ e observe que g é bijetora. De fato, sejam $C, D \in \mathcal{P}(A)$ tais que $g(C) = g(D)$, então segue que $\chi_C = \chi_D$. Assim, para $x \in A$, temos que

$$\begin{aligned} x \in C &\Leftrightarrow \chi_C(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \chi_D(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \in D. \end{aligned}$$

Portanto, $C = D$ e g é injetora. Agora, seja h uma função de A em $\{0,1\}$. Tomando

$$C = \{x \in A : h(x) = 1\},$$

segue que $C \in \mathcal{P}(A)$ e $\chi_C = h$. Portanto, g é sobrejetora. □

Teorema 5 (Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Se $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq A$, então $A \approx B$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem I.3, p. 2]. □

Agora vamos definir operações de números cardinais.

Definição 6. Sejam α e β números cardinais. Definimos

a) $\alpha + \beta := card(A \cup B)$, onde $\alpha = card(A)$, $\beta = card(B)$ e $A \cap B = \emptyset$;

b) $\alpha \cdot \beta := card(A \times B)$, onde $\alpha = card(A)$, $\beta = card(B)$;

c) $\alpha^\beta := card(^B A)$, onde $\alpha = card(A)$, $\beta = card(B)$.

Abaixo listaremos algumas propriedades da aritmética de cardinais, apesar de que usaremos neste trabalho essencialmente a última. Mas acreditamos ser interessante para o leitor perceber que muitas das propriedades de números reais continuam valendo para os números cardinais.

Proposição 7. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ números cardinais. Temos:*

a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$

b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$

c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$

d) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = (\alpha^\gamma) \cdot (\beta^\gamma).$

e) $\alpha^{\beta+\gamma} = \left(\alpha^\beta\right) \cdot (\alpha^\gamma).$

f) $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\gamma)^\beta.$

Demonstração. Veja [6, Theorems 8K, 8L, 8R and 8S]. □

Proposição 8. *Sejam α, β números cardinais, com $1 \leq \beta \leq \alpha$ e α infinito. Então $\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \alpha$.*

Demonstração. Veja [6, p. 164]. □

Um dos problemas que estamos interessados, para podermos estudar os resultados do Capítulo 2, é o de saber (em termos de número cardinal) quantas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ existem. Antes de respondermos essa questão, precisamos provar que a quantidade de números reais é a mesma quantidade de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Teorema 9. $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, *ou seja,* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Do Teorema de Cantor (Teorema 4), sabemos que $\mathcal{P}(A) \approx {}^{A}\{0,1\}$, qualquer que seja o conjunto A. Portanto

$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \mathbb{R} \approx {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}.$$

Logo basta mostrar que $\mathbb{R} \approx {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$. Pelo Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein (Teorema 5), se mostrarmos que $\mathbb{R} \preccurlyeq {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ e ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preccurlyeq \mathbb{R}$ então $\mathbb{R} \approx {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$.

Para provarmos que $\mathbb{R} \preccurlyeq {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, basta construirmos uma função do intervalo $(0,1)$ em ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ que seja injetora e o resultado será válido, pois $\mathbb{R} \approx (0,1)$. Vamos usar a expansão binária dos números do intervalo $(0,1)$. E observe que para fazer essa expansão é necessário tomar cuidado para não considerar as expansões que tenham somente o algarismo 1 a partir de um certo termo. Por exemplo consideraremos a expansão $0,1000\ldots$ ao invés de $0,0111\ldots$ E assim vamos definir a função H por

$$\begin{array}{rrcrcl} H\colon & (0,1) & \to & {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} & & \\ & z & \mapsto & H(z) : \mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ & & & n & \mapsto & H(z)(n) = n+1^{*}, \end{array}$$

onde $n+1^{*}$ representa a $(n+1)$-ésima casa de z após a vírgula. Por exemplo, se tomarmos o número $0,110100\ldots$ temos que $H(0,110100\ldots)$ é uma função $h\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ dada por:

$$h(0) = 1,\ h(1) = 1,\ h(2) = 0,\ h(3) = 1,\ h(4) = 0,\ h(5) = 0 \ \text{ e } \ h(n) = 0,\ \forall n \geq 6.$$

Note que H é injetora. De fato, considere $a, b \in (0,1)$ tais que $H(a) = H(b)$. Assim, segue que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $H(a)(n) = H(b)(n)$, ou seja, a expansão binária de a é igual a expansão binária de b. Portanto, segue que $a = b$.

Agora, para provar que ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preccurlyeq \mathbb{R}$, construiremos uma função injetora de ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ em $(0,1)$ e para isso usaremos a expansão decimal dos números do intervalo $(0,1)$. Defina a função G por

$$\begin{array}{rrcl} G\colon & {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} & \to & (0,1) \\ & f & \mapsto & G(f) = 0,f(0)\,f(1)\,f(2)\ldots \end{array}$$

Por exemplo, essa função levará a função de imagem $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0, \ldots$ no número $0,1110\ldots$. Observe que G é injetora. De fato, considere $g, h \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ tais que $G(g) = G(h)$. Assim para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $g(n) = h(n)$. Logo, $g = h$.

Assim, pelo Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein temos que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Como $card(\{0,1\}) = 2$ e $card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = card({}^{\mathbb{N}}\{0,1\}) = card(\{0,1\})^{card(\mathbb{N})}$, segue que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. □

Corolário 10. *A cardinalidade do conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é igual a cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ou seja, $card\left({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\right) = card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.*

Demonstração. Do Teorema de Cantor sabemos que $card\,(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = card\left({}^{\mathbb{R}}\{0,1\}\right) = 2^{\mathfrak{c}}$. Por outro lado, sabemos que $card\left({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\right) = card\,(\mathbb{R})^{card(\mathbb{R})}$. Assim,

$$\left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\left(\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}\right)} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}},$$

onde na primeira igualdade usamos a Proposição 7(f), na segunda a Proposição 8 e na terceira o Teorema 9. Logo $card\left({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\right) = card\,(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. □

Outro conjunto que precisamos conhecer a cardinalidade é o conjunto de todas as sequências de números reais, que denotaremos por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposição 11. $card\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \mathfrak{c}$.

Demonstração. O conjunto das sequências de números reais pode ser visto como o conjunto de todas as funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Logo

$$card\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = card(\mathbb{R})^{card(\mathbb{N})} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{(\aleph_0.\aleph_0)} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

□

1.2 Conjunto de Cantor

Nesta seção iremos abordar o conjunto de Cantor e suas propriedades e a principal referência é [7].

O conjunto de Cantor é construído indutivamente da seguinte forma:

Consideramos o intervalo real $I = [0,1]$ e no primeiro passo retiramos o seu terço médio aberto, ou seja, retiramos o intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e denotamos por C_1 o conjunto de pontos restantes em I, isto é,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

No passo seguinte, vamos repetir esse processo nos dois intervalos de C_1, ou seja, retiramos os seus terços médios abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Vamos denotar o conjunto de pontos restantes de C_1 por C_2 , isto é,

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Analogamente, no próximo passo construímos o conjunto C_3 que é dado por:

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Representaremos abaixo os três primeiros passos desta construção:

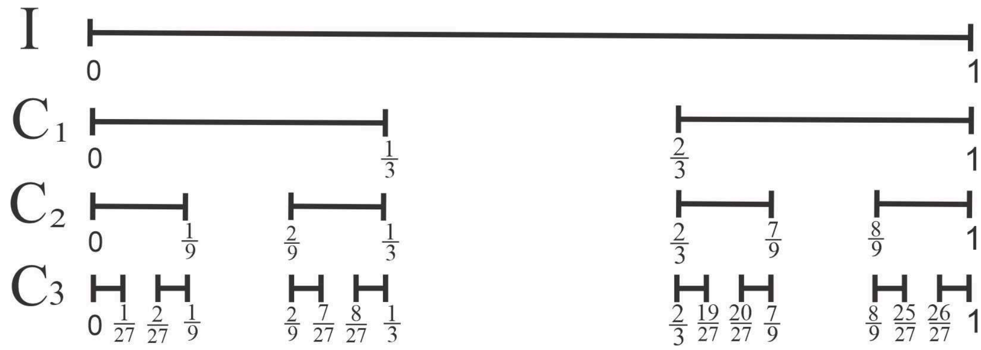

Figura 1 – Construção do Conjunto de Cantor.

Prosseguindo desta maneira obtemos uma sequência $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ de modo que

$$I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots \supset C_{n-1} \supset C_n \supset \ldots,$$

onde C_n é o conjunto dos pontos de C_{n-1} depois de retirados os seus terços médios abertos.

O conjunto de Cantor é o conjunto dos pontos que restam após aplicar esse processo para todo $n \in \mathbb{N}$. Formalmente:

Definição 12. O *conjunto de Cantor*, que denotamos por C, é a interseção dos conjuntos C_i, obtidos através do processo indutivo descrito acima, ou seja, $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$.

Observação 13. Note que o processo de construção do conjunto de Cantor pode ser feito de maneira análoga em qualquer intervalo real fechado e não degenerado. Tais conjuntos são chamados de *conjuntos do tipo de Cantor*.

O conjunto de Cantor possui as seguintes propriedades:

P1. É um conjunto compacto;
De fato, note que o conjunto de Cantor é definido como a interseção de conjuntos fechados C_i, isto é, $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, e portanto C é fechado. Como $C \subset [0, 1]$, segue que C é limitado.

P2. Possui interior vazio, ou seja, não contém intervalos;
Note que após a n-ésima iteração o conjunto de Cantor irá conter apenas intervalos de comprimento $\dfrac{1}{3^n}$. Portanto, seja J um intervalo qualquer em $[0, 1]$ de comprimento $c > 0$. Logo basta escolher n suficientemente grande tal que $\dfrac{1}{3^n} < c$, pois percebemos que J não estará contido na próxima iteração.

P3. Não possui pontos isolados;
Para todo ponto c do conjunto de Cantor existem duas possibilidades:

i. c é a extremidade de um intervalo retirado;
Nas etapas seguintes da construção do conjunto de Cantor, restarão sempre os terços finais do intervalo, do tipo $[a_n, c]$. O comprimento desse intervalo $c - a_n$ tende a zero, ou seja,

$a_n \to c$, e portanto, c não é ponto isolado.

ii. c não é a extremidade de um intervalo retirado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou após a n-ésima iteração. Assim, temos $x_n < c < y_n$ com $x_n, y_n \in C$ e $y_n - x_n = \dfrac{1}{3^n}$. Portanto, $c = \lim x_n = \lim y_n$ é ponto de acumulação.

P4. É não enumerável.

Dado qualquer subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset C$, obteremos um ponto $c \in C$ tal que $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, com centro em um ponto de C, tomamos um intervalo compacto não degenerado I_1 tal que $x_1 \notin I_1$. Como nenhum ponto de C é isolado, segue que $I_1 \cap C$ é um conjunto infinito, compacto e sem pontos isolados. Em seguida, com centro em algum ponto de C interior a I_1, tomamos um intervalo compacto não degenerado I_2 tal que $x_2 \notin I_2$. Analogamente, obtemos uma sequência decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ tais que $x_n \notin I_n$ e $I_n \cap C \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, podemos supor que I_n tem comprimento menor $\dfrac{1}{n}$. Então o ponto c, pertencente a todos os I_n é único, isto é, $\cap I_n = \{c\}$. Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$ um ponto $y_n \in I_n \cap C$, teremos então $|y_n - c| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Logo (y_n) converge para c. Como C é fechado, segue que $c \in C$, e por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $c \in I_n$. Logo $c \neq x_n$.

1.3 Espaços Métricos

O objetivo desta seção é apenas lembrar algumas definições básicas de espaços métricos e, em especial, espaços normados. Admitiremos como conhecidos pelo leitor os resultados básicos da teoria de espaços métricos. Denotamos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais ou complexos.

Definição 14. Seja M um conjunto qualquer não vazio. Uma *métrica* em M é uma função $d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(D1) $d(x, y) \geq 0$, para todos x, $y \in M$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

(D2) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos x, $y \in M$;

(D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos x, y, $z \in M$.

O par (M, d) é dito *espaço métrico* e, quando não houver dúvida sobre qual métrica estamos nos referindo, diremos apenas que M é um espaço métrico.

Definição 15. Seja M um espaço métrico. Dizemos que uma sequência (x_n) em M é uma *sequência de Cauchy* quando a distância entre os seus termos se aproxima de 0, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall\, n, m \geq n_0.$$

Um espaço métrico M é dito *espaço métrico completo* ou apenas *completo* quando toda sequência de Cauchy em M converge para um limite que também está em M.

Definição 16. Seja E espaço vetorial. Uma *norma* é uma função $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in E$ um número real $\|x\|$ e satisfaz as seguintes condições:

(N1) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todos x, $y \in E$.

Um espaço vetorial E com uma norma é chamado *espaço vetorial normado*. Observe que a função $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em E. De fato,

(D1) Para todos x, $y \in E$ e pela condição (N1) segue que:

$$d(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \quad \text{e}$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(D2) Para todos x, $y \in E$ e pela condição (N2) segue que:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot y - x\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

(D3) Para todos x, y, $z \in E$ e pela condição (N3) segue que:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Dizemos que a métrica acima é induzida pela norma ou que a norma induz a métrica.

Definição 17. Seja E um espaço normado. Dizemos que E é *espaço de Banach* se for completo com relação à métrica induzida $d(x, y) = \|x - y\|$.

Uma caracterização bastante útil (e que será usada no Capítulo 3) de completude de um espaço normado é a seguinte:

Proposição 18. *Um espaço normado E é completo se, e somente se, cada série de E absolutamente convergente é convergente em E. Em outras palavras, E é completo se, e somente se, para toda sequência (x_n) em E tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge em $\mathbb{R}$ tivermos que $\sum_{j=1}^{\infty} x_n$ é convergente em E.*

Demonstração. Suponha E completo e seja $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ uma série absolutamente convergente em E. Então $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$ e dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n > m \geq n_0$ temos que

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\| < \varepsilon, \quad \text{onde } S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Portanto (S_n) é uma sequência de Cauchy e, como E é um espaço completo, segue que (S_n) converge em E.

Para provar a implicação contrária, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em E e note que é fácil construir uma sequência estritamente crescente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-j}, \quad \forall\, m, n \geq n_j.$$

Em particular,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Logo a série $\sum_{j=1}^{\infty}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$ é convergente em E e, como $x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = x_{n_{k+1}}$, concluímos que a sequência (x_{n_k}) converge em E. Assim, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em E que admite subsequência convergente. Portanto (x_n) é convergente em E e daí E é completo. $\square$

2 Lineabilidade do conjunto de funções ES

Iniciaremos este capítulo relembrando a definição de lineabilidade que foi dada na introdução.

Definição 19. Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $A \subset E$ é λ-*lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão λ (aqui λ é um número cardinal).

Definição 20. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é *sobrejetora em todo lugar*, ou abreviadamente f é ES, se para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tem-se que $f(I) = \mathbb{R}$. De outra maneira, dizemos que f é ES, se para qualquer intervalo (a, b) e qualquer $s \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = s$.

É impossível imaginar o gráfico de uma função ES e sequer sabemos se existem funções desse tipo. Funções ES de fato existem e denotaremos o conjunto de tais funções por $ES(\mathbb{R})$. Mais ainda, provaremos que, surpreendentemente, a quantidade de funções ES é a mesma quantidade de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, ou seja, $2^{\mathfrak{c}}$ (veja Corolário 10). O que é ainda mais surpreendente é que o conjunto $ES(\mathbb{R})$ é $2^{\mathfrak{c}}$-lineável, isto é, existe um espaço vetorial de dimensão $2^{\mathfrak{c}}$ formado (a menos da função nula) apenas por funções ES. Este último fato será provado na segunda seção deste capítulo.

2.1 Construção de uma função de $ES(\mathbb{R})$

Abaixo apresentaremos duas maneiras distintas de construir exemplos de funções ES. Para a primeira construção precisaremos de um resultado que envolve interior e fecho de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Faremos essa demonstração mais geral, no caso de espaços métricos. Usaremos as notações usuais de interior ($int(A)$) e fecho ($\overline{A}$) de um subconjunto A de um espaço métrico.

Lema 21. *Sejam M um espaço métrico e $D, E \subseteq M$. Então $int(D - E) = intD - \overline{E}$.*

Demonstração. Tome $x \in int(D - E)$. Então existe $r > 0$ tal que (aqui $B(x; r)$ denota a bola aberta de centro x e raio r),

$$
\begin{aligned}
& B(x;r) \subseteq (D - E) \\
\Rightarrow \quad & B(x;r) \cap E = \emptyset \\
\Rightarrow \quad & x \notin \overline{E}.
\end{aligned}
$$

Mas $x \in intD$ e logo $x \in intD - \overline{E}$. Portanto $int(D - E) \subseteq intD - \overline{E}$.
Por outro lado, tome $x \in intD - \overline{E}$. Então existem r_1, $r_2 > 0$ tais que

$$B(x; r_1) \subseteq D$$

$$B(x; r_2) \cap \overline{E} = \emptyset.$$

Tomando $r = min\{r_1, r_2\}$ segue que:

$$B(x, r) \subseteq B(x; r_1) \subseteq D$$

$$B(x, r) \cap E \subseteq B(x; r_2) \cap E = \emptyset.$$

Portanto, $x \in int(D - E)$. □

Construção 1. Seja $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a coleção de todos os intervalos abertos com extremidades racionais. Note que essa coleção é de fato enumerável, pois as extremidades dos intervalos são racionais e $card\,(\mathbb{Q}) = card\,(\mathbb{N})$.

Observe que conseguimos um intervalo fechado inteiramente contido em I_1 e portanto podemos construir um conjunto do tipo de Cantor nesse intervalo, chamaremos ele de C_1. Agora, gostaríamos de criar um novo conjunto do tipo de Cantor de maneira que ele e C_1 não tenham pontos em comum. Assim, consideremos $I_2 - C_1$ e note que ele ainda possui intervalos. De fato, suponha que $int(I_2 - C_1) = \emptyset$. Então, temos pelo Lema 22 que

$$int(I_2 - C_1) = intI_2 - \overline{C_1} = I_2 - C_1,$$

pois I_2 é aberto e C_1 é fechado. Assim, $I_2 - C_1 = \emptyset$ e, como

$$I_2 = (I_2 \cap C_1) \cup (I_2 - C_1),$$

segue que $I_2 = I_2 \cap C_1$. Logo $I_2 \subseteq C_1$, o que é uma contradição, pela propriedade **P2**. Portanto conseguimos também um conjunto do tipo de Cantor em $I_2 - C_1$ e o denotaremos por C_2.

Em seguida, por um argumento análogo ao feito acima $I_3 - (C_1 \cup C_2)$ contém também um conjunto do tipo de Cantor, que denotamos por C_3.

Indutivamente construímos uma família $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos do tipo de Cantor, dois a dois disjuntos, tais que

$$I_n - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_k \right) \supset C_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Pela propriedade **P4** temos que a cardinalidade de todo conjunto do tipo de Cantor é igual a $\mathfrak{c}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, tome qualquer bijeção $\phi_n \colon C_n \longrightarrow \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$f(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & \text{se } x \in C_n \\ 0, & \text{caso o contrário.} \end{cases}$$

Vejamos agora que de fato f é ES:

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e vamos mostrar que $f(I) = \mathbb{R}$. Como I contém infinitos números racionais, segue que existe k tal que $I_k \subseteq I$. Assim,

$$\mathbb{R} = \phi_k(C_k) = f(C_k) \subseteq f(I_k) \subseteq f(I) \subseteq \mathbb{R}.$$

Portanto $f(I) = \mathbb{R}$.

Construção 2. Nesta construção, iniciaremos criando uma função $f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que para cada intervalo (a,b), onde $0 \leq a < b \leq 1$, temos que $f((a,b)) = [0,1]$.

Observe que se x for qualquer número no intervalo $[0,1]$ então sua representação decimal será dada por $x = 0,a_1a_2a_3a_4\ldots$ e, afim de evitar confusões, não consideraremos expansões decimais com infinitos dígitos 9 consecutivos, por exemplo, se $x = 0,0999\ldots$ consideraremos $x = 0,1$. Defina:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0,a_1a_3a_5a_7\ldots \text{ for irracional;} \\ 0,a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots & \text{se } 0,a_1a_3a_5a_7\ldots \text{ for racional e o} \\ & \text{primeiro segmento que se repete} \\ & \text{começa em } a_{2n-1}. \end{cases}$$

Seja I um subintervalo qualquer de $[0,1]$ e vamos tomar dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-3}$, de modo que os números $0,a_1a_2\ldots a_{2n-3}0$ e $0,a_1a_2\ldots a_{2n-3}1$ estão ambos em I e $a_{2n-3} \neq 0$ e $a_{2n-3} \neq 1$.

Dado $y = 0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ um ponto qualquer de $[0,1]$ queremos encontrar $x \in I$ tal que $f(x) = y$. Assim, vamos definir

$$a_{2n-1} = a_{2n+1} = \ldots = a_{4n-5} = 0 \text{ e } a_{4n-3} = 1,$$

de maneira que os a's seguintes de índice ímpar são definidos por repetição cíclica de grupos de n dígitos, e vamos considerar o número

$$x = 0,a_1a_2a_3\ldots a_{2n-3}a_{2n-2}0b_10b_20b_3\ldots b_{n-1}1b_n0b_{n+1}0\ldots \tag{2.1}$$

onde $a_{2n-2} = 0$ e b_n corresponde ao dígito $(4n-2)$-ésimo de x.

Para aplicarmos a função f em (2.1) teremos que analisar se o número

$$0, a_1 a_3 a_5 \dots a_{2n-3} a_{2n-1} a_{2n-1} \dots$$

é racional ou não. Observe que escolhemos $a_{2n-3} \neq 0$ e $a_{2n-3} \neq 1$ então o número

$$0, a_1 a_3 a_5 \dots a_{2n-3} 00 \dots 0100 \dots 010 \dots$$

é racional e o termo em que começa a repetição é $a_{2n-1} = 0$ e, portanto, $f(x) = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots = y$.

Como queremos uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que pertence à $ES(\mathbb{R})$, vamos considerar a função $h\colon (0,1) \to (0,1)$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \notin \{0,1\} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{se } f(x) \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Então essa função h tem a propriedade que para todo $0 < a < b < 1$ temos $h((a,b)) = (0,1)$.

Podemos considerar então H um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $(0,1)$. Seja $g = H^{-1}hH$, isto é,

$$\mathbb{R} \xrightarrow{H} (0,1) \xrightarrow{h} (0,1) \xrightarrow{H^{-1}} \mathbb{R}.$$

Assim $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade procurada, isto é, para cada $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $g((a,b)) = \mathbb{R}$.

2.2 Lineabilidade do conjunto $ES(\mathbb{R})$

Começaremos essa seção com um resultado auxiliar na demonstração da lineabilidade de $ES(\mathbb{R})$.

Lema 22. *Sejam $B_1, B_2, \dots, B_m$ conjuntos arbitrários distintos e não vazios. Então existe $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $B_k - B_i \neq \emptyset$ para todo $i \neq k$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que para todo $k \in \{1, \dots, m\}$ existe $i \neq k$ tal que $B_k - B_i = \emptyset$. Assim, para $k = 1$ existe $i \in \{2, \dots, m\}$ tal que $B_1 - B_i = \emptyset$. Sem perda de generalidade suponha que $i = 2$. Logo $B_1 - B_2 = \emptyset$, isto é, $B_1 \subsetneq B_2$. Para $k = 2$ existe $i \in \{1, 3, \dots, m\}$ tal que $B_2 - B_i = \emptyset$. Sem perda de generalidade suponha que $i = 3$, logo $B_2 \subsetneq B_3$.

Repetindo o processo temos que $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots \subsetneq B_m$. Como a inclusão é válida para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, temos que para $k = m$ existe $i \in \{1, \dots, m-1\}$ tal que $B_m \subsetneq B_i$, isto é,

$$B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots \subsetneq B_i \subsetneq \dots \subsetneq B_m \subsetneq B_i,$$

o que é uma contradição. □

Teorema 23. *Existe um espaço vetorial* Λ *de funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *com as seguintes propriedades:*
(i) Todo elemento não nulo de Λ *é uma função sobrejetora;*
(ii) dim $(\Lambda) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Demonstração. Fixe $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, e para cada subconjunto não vazio A de $\mathbb{R}$ vamos definir a função $H_A \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_A(y, x_1, x_2, x_3, \ldots) = \varphi_r(y) \prod_{i=1}^{\infty} \chi_A(x_i),$$

onde χ_A é a função característica do conjunto A, isto é,

$$\chi_A = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in A \\ 0, \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

e $\varphi_r(y) = e^{ry} - e^{-ry}$.

Observe que a função φ_r é sobrejetora. De fato, tome qualquer $y \in \mathbb{R}$ e vamos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = e^{rx} - e^{-rx}$. Temos que

$$\begin{aligned} & y = e^{rx} - e^{-rx} \\ \Leftrightarrow \quad & y \cdot (e^{rx}) = e^{2rx} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2rx} - y \cdot (e^{rx}) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Substituindo $e^{rx} = \alpha$ temos

$$\begin{aligned} & \alpha^2 - y\alpha - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{rx} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Observe que e^{rx} é sempre positivo e $\sqrt{y^2 + 4} > y$, pois $\sqrt{y^2} = |y| \geq y$. Então

$$e^{rx} = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow rx = ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)}{r}.$$

Portanto a função φ_r é sobrejetora.

Agora vamos mostrar que $\{H_A : A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset\}$ é linearmente independente.

Sejam $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}$ subconjuntos distintos não vazios e suponha que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j H_{A_j} \equiv 0.$$

Como todos os A_j são distintos e não vazios segue, sem perda de generalidade, que para cada $j < m$, existe $x_j \in A_m - A_j$ (veja Lema 22). Considere $\overline{x_m} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, onde

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ se } i = 1 \\ x_{i-1}, \text{ se } i = 2, \ldots, m-1, \\ x_{m-1,}, \text{ se } i = m, m+1, \ldots \end{cases},$$

isto é,

$$\overline{x_m} = (1, x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}, x_{m-1}, \ldots). \tag{2.2}$$

Observe que

$$\begin{cases} \chi_{A_j}(x_j) = 0, \forall\, j = 1, \ldots, m-1 \Rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_j}(\alpha_{i+1}) = 0, \forall\, j = 1, \ldots, m-1 \\ \chi_{A_m}(x_i) = 1, \forall\, i = 1, \ldots, m-1 \Rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_m}(\alpha_{i+1}) = 1, \forall\, i = 1, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j H_{A_j}(\overline{x_m}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\varphi_r(1) \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_j}(\alpha_{i+1})\right) \\ &= \lambda_m \varphi_r(1) \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_m}(\alpha_{i+1}) \\ &= \lambda_m \varphi_r(1). \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_m \left(e^r - e^{-r}\right) = 0$. Como

$$\begin{array}{rl} & e^r - e^{-r} = 0 \\ \Leftrightarrow & e^r = e^{-r} \\ \Leftrightarrow & e^{2r} = 1 \\ \Leftrightarrow & 2r = 0 \\ \Leftrightarrow & r = 0 \end{array}$$

e pela hipótese $r \neq 0$, temos então que $\lambda_m = 0$.

Repetindo esse procedimento para $m-1$, temos que para todo $j < m-1$ existe $x_j \in A_{m-1} - A_j$. Se considerarmos $\overline{x_{m-1}} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$, onde

$$\beta_i = \begin{cases} 1, \text{ se } i = 1 \\ x_{i-1}, \text{ se } i = 2, \ldots, m-2, \\ x_{m-2}, \text{ se } i = m-1, m, \ldots \end{cases}$$

ou seja,

$$\overline{x_{m-1}} = (1, x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}, x_{m-2}, x_{m-2}, x_{m-2}, \ldots),$$

teremos que

$$\begin{cases} \chi_{A_j}(x_j) = 0, \forall j = 1, \ldots, m-2 \Rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_j}(\beta_{i+1}) = 0, \forall j = 1, \ldots, m-2 \\ \chi_{A_{m-1}}(x_i) = 1, \forall i = 1, \ldots, m-2 \Rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_{m-1}}(\beta_{i+1}) = 1, \forall i = 1, \ldots, m-2. \end{cases}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j H_{A_j}\left(\overline{x_{m-1}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \left(\varphi_r(1) \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_j}(\beta_{i+1})\right) \\ &= \lambda_{m-1}\varphi_r(1) \prod_{i=1}^{\infty} \chi_{A_{m-1}}(\beta_{i+1}) \\ &= \lambda_{m-1}\varphi_r(1). \end{aligned}$$

Portanto $\lambda_{m-1}\left(e^r - e^{-r}\right) = 0$ e logo $\lambda_{m-1} = 0$.

Note que seguindo este procedimento teremos que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Assim, o conjunto $\{H_A : A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset\}$ é linearmente independente.

Pela Proposição 11, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{R}$ possuem a mesma cardinalidade, então existe uma função $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bijetora. E se compormos as funções $H_A\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ e $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ obtemos $H_A \circ G\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Queremos mostrar que esta função é sobrejetora. Dado $y \in \mathbb{R}$, observe que como H_A é uma função sobrejetora então existe $\overline{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de modo que $H_A(\overline{y}) = y$. Como G é uma função bijetora e $\overline{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \overline{y}$. Logo $H_A(G(x)) = H_A(\overline{y}) = y$.

Agora queremos mostrar que o conjunto

$$\{H_A \circ G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset\}$$

é linearmente independente. Assim, sejam $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}$ distintos e não vazios tais que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_i (H_{A_i} \circ G) \equiv 0$.
Como G é bijetora temos que para $\overline{x_m}$ de (2.2) existe $t_m \in \mathbb{R}$ tal que $G(t_m) = \overline{x_m}$. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_i (H_{A_i} \circ G)(t_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_i H_{A_i}(\overline{x_m}) \\ &= \lambda_m \varphi_r(1) \\ &\Rightarrow \lambda_m = 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, para cada $\overline{x_j} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, m-1$, existe $t_j \in \mathbb{R}$ tal que $G(t_j) = \overline{x_j}$ e, portanto, $\lambda_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Considerando o espaço gerado $\Lambda = [H_A \circ G : A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset]$ (aqui os colchetes denotam o espaço gerado), então $\dim \Lambda = 2^{\mathfrak{c}}$. Precisamos mostrar agora que qualquer função não nula de Λ é sobrejetora.

Tome $\mathcal{H} \in \Lambda$ não nula. Então existem $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}$ distintos e não vazios tais que

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i (H_{A_i} \circ G) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_i H_{A_i} \right) \circ G.$$

Como queremos mostrar que a função $\mathcal{H}$ é sobrejetora dado $s \in \mathbb{R}$, tomemos $t \in \mathbb{R}$ e

$$\overline{x} = (a, x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}, x_{m-1}, \ldots)$$

onde a é tal que $\varphi_r(a) = \dfrac{s}{\lambda_m}$, $x_j \in A_m - A_j$ e $G(t) = \overline{x}$. Segundo (2.3) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (H_{A_i} \circ G)(t) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_i H_{A_i}(\overline{x}) \\ &= \lambda_m \varphi_r(a) \\ &= \lambda_m \frac{s}{\lambda_m} \\ &= s. \end{aligned}$$

Assim, Λ é um espaço vetorial de funções sobrejetoras de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com dimensão $2^{\mathfrak{c}}$
. □

Proposição 24. *O conjunto* $ES(\mathbb{R})$ *é* $2^{\mathfrak{c}}$*-lineável.*

Demonstração. Seja Λ o espaço vetorial do Teorema 23 e $f \in \mathrm{ES}(\mathbb{R})$.

Queremos mostrar que $\Delta = \{H \circ f : H \in \Lambda\}$ é um espaço vetorial formado, a menos da função nula, por funções ES e de dimensão $2^{\mathfrak{c}}$.

Observe que, dadas m funções linearmente independentes $H_j \in \Lambda$, $j = 1, \ldots, m$, temos que a família $\{H_j \circ f\}_{j=1}^{m}$ é linearmente independente. De fato, suponhamos por absurdo que não seja linearmente independente. Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ nem todos nulos tais que

$$h = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(H_j \circ f\right) \equiv 0.$$

Por construção, podemos escrever $h = G \circ f$, onde G é uma função sobrejetora. Dado $s \in \mathbb{R}$ não nulo temos que existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $G\left(d\right) = s$ e existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(a\right) = d$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left(G \circ f\right)\left(a\right) &= G\left(f\left(a\right)\right) \\ &= G\left(d\right) \\ &= s \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Logo $\{H_j \circ f\}_{j=1}^{m}$ é linearmente independente, e daí $\dim \Delta = \dim \Lambda = 2^{\mathfrak{c}}$.

Agora, seja $g \in \Delta$ não nula, $s \in \mathbb{R}$ e $[a, b]$ um intervalo qualquer da reta. Queremos encontrar $l \in [a, b]$ tal que $g\left(l\right) = s$. Sabemos que g é escrita como $g = G \circ f$, onde G é sobrejetora. Logo existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $G\left(d\right) = s$. Como $f \in ES\left(\mathbb{R}\right)$ existe $l \in [a, b]$ tal que $f\left(l\right) = d$. Portanto,

$$\begin{aligned} g\left(l\right) &= \left(G \circ f\right)\left(l\right) \\ &= G\left(f\left(l\right)\right) \\ &= G\left(d\right) \\ &= s. \end{aligned}$$

Logo g é ES. $\square$

3 Conjuntos de Sequências

Durante todo o capítulo, $\mathbb{K}$ denotará o conjunto dos números reais ou complexos. Neste capítulo introduziremos alguns espaços de Banach de sequências clássicos, dentro dos quais pretendemos explorar a noção de espaçabilidade. Os espaços que estamos interessados são os seguintes:

Definição 25. Dado $1 \leq p < \infty$, definiremos o *espaço das sequências absolutamente p-somáveis* por

$$\ell_p = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}.$$

Definiremos o *espaço das sequências limitadas* por

$$\ell_\infty = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\}.$$

O subespaço de ℓ_∞ formado pelas sequências que convergem para 0 será denotado por c_0, ou seja,

$$c_0 = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : x_j \to 0 \right\}.$$

É claro que ℓ_∞ é espaço vetorial e que c_0 é subespaço vetorial de ℓ_∞. Para garantir que ℓ_p é espaço vetorial, precisamos provar que ele é fechado para a soma de elementos de ℓ_p. Para isso, precisamos introduzir algumas desigualdades que serão úteis também para se definir uma norma em ℓ_p.

As principais referências para os resultados básicos de Análise Funcional deste capítulo foram [4, 8].

3.1 Desigualdades de Hölder e Minkowski

Lema 26. *Sejam a, b, α, $\beta > 0$, com $\alpha + \beta = 1$. Então*

$$a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

Demonstração. Para cada $0 < \alpha \leq 1$, considere a função $f\colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Então $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha$ e como $0 < \alpha \leq 1$, temos que

$$\begin{cases} f'(t) > 0, & \text{se } 0 < t < 1 \\ f'(t) < 0, & \text{se } t > 1 \\ f'(t) = 0, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Logo, f assume máximo em $t = 1$. Daí, $f(t) \leq f(1)$ para todo $t > 0$ e portanto

$$t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha. \tag{3.1}$$

Por hipótese $\alpha + \beta = 1$, então $\beta = 1 - \alpha$ e tomando $t = \dfrac{a}{b}$ segue que

$$\begin{aligned}
& \left(\tfrac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha\left(\tfrac{a}{b}\right) \leq 1 - \alpha \\
\Rightarrow\ & \left(\tfrac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha\left(\tfrac{a}{b}\right) + \beta \\
\Rightarrow\ & a^\alpha \cdot b^{-\alpha} \leq \alpha \cdot a \cdot b^{-1} + \beta \\
\Rightarrow\ & a^\alpha \cdot b^{-\alpha} \cdot b \leq \alpha \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b + \beta \cdot b \\
\Rightarrow\ & a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b \\
\Rightarrow\ & a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha \cdot a + \beta \cdot b.
\end{aligned}$$

□

Teorema 27 (Desigualdade de Hölder para somas)**.** *Sejam* $1 < p,\ q < \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$*. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Vamos aplicar o lema anterior com:

$$a_j = \frac{|x_j|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p}, b_j = \frac{|y_j|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q}, \alpha = \frac{1}{p} \text{ e } \beta = \frac{1}{q}.$$

Assim obtemos que

$$a_j^\alpha \cdot b_j^\beta \leq \alpha \cdot a_j + \beta \cdot b_j.$$

Logo

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{|x_j|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|y_j|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot a_j + \frac{1}{q} \cdot b_j \\
\Rightarrow\ & \frac{|x_j|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_j|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q} \\
\Rightarrow\ & \frac{|x_j \cdot y_j|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q}.
\end{aligned}$$

Fazendo a soma para $j = 1, \ldots, n$ na última desigualdade, segue que

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{1}{q} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j \cdot y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Corolário 28 (Desigualdade de Hölder para séries)**.** *Sejam $1 < p,\ q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$. Então $(x_j y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Temos pela desigualdade de Hölder para somas que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $(x_j) \in \ell_p$ e $(y_j) \in \ell_q$, segue que a sequência das somas parciais $\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|\right)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Como ela é claramente monónota, segue que é convergente. Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{e, portanto, } (x_j y_j) \in \ell_1.$$

□

Teorema 29 (Desigualdade de Minkowiski para somas)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e sejam $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Então*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Se $p = 1$, então segue da desigualdade triangular em $\mathbb{R}$ que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j|. \tag{3.2}$$

Se $p > 1$, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1}.$$

E por (3.2) obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1}. \tag{3.3}$$

Tome $q \in (0, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observe que $p + q = pq$. Então:

$$p = (p-1)q. \tag{3.4}$$

Pela desigualdade de Hölder:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \left(|x_j + y_j|^{p-1}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Agora, obtemos usando (3.4) que:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De maneira análoga, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Voltando em (3.3) e substituindo, encontramos:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leq \left[\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$. Logo,

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^1}{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\left(1-\frac{1}{q}\right)} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Corolário 30. *Seja* $1 \leq p < \infty$ *e sejam* $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. *Então* $(x_j + y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ *e*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Basta trabalhar com as somas parciais, assim com fizemos no Corolário 28, e utilizar a desigualdade de Minkowiski para somas. □

3.2 Espaços Normados de Sequências

O Corolário 30 garante que ℓ_p é um espaço vetorial. Vejamos agora que este resultado também garantirá a validade da desigualdade triangular para a norma que definiremos em ℓ_p.

Proposição 31. *A função abaixo define uma norma em ℓ_p:*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Sejam $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$, $y = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e α, $\beta \in \mathbb{K}$. Assim temos que:

(N1)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0,$$

e

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p = 0 \Leftrightarrow |a_j|^p = 0,\, \forall\, j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow |a_j| = 0,\, \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

(N2)

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha|^p \cdot |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|^{\frac{p}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p.$$

(N3) Pela desigualdade de Minkowski temos que:

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

□

Proposição 32. *O espaço ℓ_p é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escreveremos $x_n = \left(a_n^k\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_n^j - a_m^j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \qquad \forall\, n\,, m > n_0. \tag{3.5}$$

Em particular, para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que

$$\left|a_n^j - a_m^j\right| < \varepsilon, \quad \forall\, m\,, n > n_0.$$

Note que a sequência $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ e portanto é convergente. Defina $a_j = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^j$ e considere $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ e vamos provar que $x \in \ell_p$ e $x_n \to x$. De (3.5) segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left|a_n^j - a_m^j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall\, m, n \geq n_0.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left|a_n^j - a^j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad \forall\, m, n \geq n_0. \tag{3.6}$$

Como (3.6) é válido para todo $k \in \mathbb{N}$, fazendo $k \to \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_n^j - a^j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad \forall\, m, n \geq n_0.$$

Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $\|x - x_n\|_p \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, $x = x_{n_0} - (x_{n_0} - x) \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \to 0$, isto é, $x_n \to x$ em ℓ_p. $\square$

Proposição 33. *A função abaixo define uma norma em* ℓ_∞*:*

$$\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|.$$

Demonstração. Sejam $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$, $y = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ e α, $\beta \in \mathbb{K}$. Assim temos que:

(N1)

$$\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \geq 0,$$

e

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| = 0 \Leftrightarrow |a_j| = 0,\ \forall\, j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = (a_j)_{j=1}^{\infty} = 0.$$

(N2)

$$\|\alpha \cdot x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\alpha \cdot a_j| = |\alpha| \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

(N3)

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j + b_j| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| + \sup_{j\in\mathbb{N}} |b_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

$\square$

Como c_0 é subespaço vetorial de ℓ_∞, segue que $\|\cdot\|_\infty$ também define uma norma em c_0.

Proposição 34. *O espaço* ℓ_∞ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞. Vamos dizer que $(x_n) = \left(a_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, segue a desigualdade

$$\left|a_n^j - a_m^j\right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|a_n^k - a_m^k\right| = \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Isso mostra que $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy para cada j em $\mathbb{K}$ e portanto converge. Digamos que a_j seja o limite da sequência $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$. Considere $x = (a_j)$. Vamos mostrar que $x \in \ell_\infty$ e que $x_n \longrightarrow x$. Seja $\varepsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m,\ n \geq n_0$ então

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon, \text{ ou seja, } \left|a_n^j - a_m^j\right| < \varepsilon, \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Assim, se fizermos $m \longrightarrow \infty$ temos que para todo $n \geq n_0$ então

$$\left|a_n^j - a_j\right| \leq \varepsilon, \forall\, j \in \mathbb{N},$$

e daí

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \left|a_n^j - a_j\right| \leq \varepsilon.$$

Desta forma, temos que $(x_n - x) = (a_n^j - a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ e $(x_n - x)_{n=1}^{\infty}$ converge a zero. Portanto $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_\infty$ e $x_n \longrightarrow x \in \ell_\infty$. $\square$

Proposição 35. *O espaço c_0 é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em c_0 e, para cada $n \in \mathbb{N}$, escreva $x_n = \left(a_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\left|a_n^j - a_m^j\right| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|a_n^k - a_m^k\right| = \left\|\left(a_n^k - a_m^k\right)\right\|_\infty = \|x_n - x_m\|_\infty .$$

Como (x_n) é de Cauchy segue que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência de escalares $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portanto convergente. Digamos $a_n^j \longrightarrow a_j$ quando n tende a infinito. Chamando $x = (a_j)$, mostraremos que $x \in c_0$ e que $x_n \longrightarrow x$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geq n_0$ vale que

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Daí, para todos $j \in \mathbb{N}$ e $n, m \geq n_0$,

$$\left|a_n^j - a_m^j\right| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ na equação (3.7), segue que para cada $j \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} &\left|a_n^j - a_j\right| \leq \varepsilon \qquad (3.8)\\ \Longrightarrow &\left|a_{n_0}^j - a_j\right| \leq \varepsilon \\ \Longrightarrow &|a_j| - \left|a_{n_0}^j\right| \leq \varepsilon \\ \Longrightarrow &|a_j| \leq \varepsilon + \left|a_{n_0}^j\right|. \end{aligned}$$

Como $\left(a_{n_0}^j\right)_{j=1}^{\infty} \in c_0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$ segue que

$$\begin{aligned} \left|a_{n_0}^j\right| &< \varepsilon \\ \Longrightarrow |a_j| &\leq 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $a_j \longrightarrow 0$, ou seja, $x \in c_0$. Por outro lado, de (3.8) segue que, para todo $n \geq n_0$, temos

$$\|x_n - x\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

E portanto, $x_n \longrightarrow x$. □

Proposição 36. *Sejam p e q números reais tais que $1 \leq q < p$. Então*

$$\ell_q \subseteq \ell_p \text{ e } \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q.$$

Demonstração. Provaremos primeiramente que se $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$ e $\|x\|_q = 1$, então $x \in \ell_p$ e $\|x\|_p \leq \|x\|_q = 1$.

Como $\|x\|_q = 1$ temos que $\|x\|_q^q = 1$, isto é, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^q = 1$ e assim obtemos $|x_j| \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $p > q$, segue que

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q = \|x\|_q^q = 1.$$

Ou seja, $\|x\|_p \leq 1 = \|x\|_q$.

Agora, seja $x \in \ell_q$, $x \neq 0$. Então $y = \frac{x}{\|x\|_q}$ é tal que

$$\|y\|_q = \left\| \frac{x}{\|x\|_q} \right\|_q = \frac{1}{\|x\|_q} \cdot \|x\|_q = 1.$$

Como $y \in \ell_p$ e $\|y\|_p \leq 1$, utilizando o caso anterior, temos que

$$\begin{aligned} & \left\| \tfrac{x}{\|x\|_q} \right\|_p \leq 1 \\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{\|x\|_q} \cdot \|x\|_p \leq 1 \\ \Rightarrow\ & \|x\|_p \leq \|x\|_q. \end{aligned}$$

□

Observação 37. Note que, para $1 \leq q < p$, a inclusão acima é própria, isto é, existem elementos de ℓ_p que não são elementos de ℓ_q.

De fato, como $1 \leq q < p$, então $1 < \frac{p}{q}$. Logo,

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right) \in \ell_p, \text{ pois } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} < \infty,$$

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right) \notin \ell_q, \text{ pois } \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Portanto, $\ell_p - \ell_q \neq \emptyset$.

3.3 Espaçabilidade de conjuntos de sequências

Relembremos a definição de espaçabilidade vista na introdução.

Definição 38. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que $A \subset E$ é *espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita e fechado em E.

Mostraremos nesta seção que os espaços $\ell_p - \ell_q$ e $\ell_\infty - c_0$ são espaçáveis. Para demonstrar tais fatos, será muito útil respondermos a seguinte pergunta:

$$\text{É possível escrever } \mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j \text{ com cada } \mathbb{N}_j \text{ infinito e 2 a 2 disjuntos?}$$

A resposta é sim e existem diversas maneiras de se fazer isso. Abaixo temos um exemplo dessa decomposição.

Exemplo 1. Seja $\mathbb{N}_1$ o conjunto de todos os números primos e o número 1.

Seja $\mathbb{N}_2$ o conjunto de todos os números que são produto de apenas dois números primos.

Seja $\mathbb{N}_3$ o conjunto de todos os números que são produto de apenas três números primos, e assim por diante construímos $\mathbb{N}_4, \mathbb{N}_5, \ldots$.

Dessa maneira os conjuntos seriam da seguinte forma:

$\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

$\mathbb{N}_2 = \{4, 6, 9, 10, 14, 15, \ldots\}$

$\mathbb{N}_3 = \{8, 12, 18, 20, 27, 28, \ldots\}$

$\vdots$

Observe que esses conjuntos são infinitos (pois existem infinitos números primos) e dois a dois disjuntos (pois o Teorema Fundamental da Aritmética garante que cada número natural maior que 1, ou é primo ou se escreve de maneira única como produto de primos).

Teorema 39. *Os conjuntos $\ell_p - \ell_q$ e $\ell_\infty - c_0$ são espaçáveis, onde $1 \leq q < p$.*

Demonstração. Faremos as duas demonstrações simultaneamente. Sendo assim, considere um elemento $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in E$, onde $E = \ell_p - \ell_q$ ou $E = \ell_\infty - c_0$ e cada $\alpha_j \neq 0$.

Seja $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j = \mathbb{N}$ uma decomposição qualquer de $\mathbb{N}$ como uma união infinita de conjuntos infinitos e dois a dois disjuntos, e denotemos cada $\mathbb{N}_j = \{j_1 < j_2 < j_3 < \dots\}$.

Defina $y_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k . e_{j_k}$ para todo $j \in \mathbb{K}$, onde e_{j_k} é o vetor canônico, ou seja, vale 1 na coordenada j_k e zero nas demais. Note que $y_j \in E$. De fato, no caso $E = \ell_p - \ell_q$ temos que

$$\|y_j\|_p = \|\alpha\|_p < \infty \text{ e}$$

$$\|y_j\|_q = \|\alpha\|_q = \infty, \text{ pois } \alpha \in \ell_p - \ell_q.$$

E no caso, $E = \ell_\infty - c_0$, temos que

$$\|y_j\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k| = \|\alpha\|_\infty < \infty$$

e como a sequência α é uma subsequência da sequência y_j e $\alpha \notin c_0$ segue que $y_j \notin c_0$.

Defina $T\colon \ell_1 \longrightarrow M$, onde $M = \ell_p$ ou $M = \ell_\infty$, de modo que cada $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ é associada à $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot y_j \in M$, isto é, $T\left((b_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot y_j$. Note que essa aplicação está bem definida, ou seja, $T\left((b_j)_{j=1}^{\infty}\right) \in M$. De fato, no caso $M = \ell_p$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j \cdot y_j\|_p &= \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \cdot \|y_j\|_p \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \cdot \|\alpha\|_p \\ &= \|\alpha\|_p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \\ &= \|\alpha\|_p \cdot \| (b_j)_{j=1}^{\infty} \|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Logo a série $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot y_j$ é absolutamente convergente em ℓ_p e, como ℓ_p é um espaço de Banach, segue da Proposição 18 que $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot y_j$ converge em ℓ_p. E para $M = \ell_\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j \cdot y_j\|_\infty &= \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \cdot \|y_j\|_\infty \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \cdot \|\alpha\|_\infty \\ &= \|\alpha\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \\ &= \|\alpha\|_\infty \cdot \left\|(b_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Da mesma forma que fizemos para o caso ℓ_p, segue que $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot y_j$ converge em ℓ_∞.

Observe que T é linear, pois dados $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ segue que:

$$
\begin{aligned}
T\left((a_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda \cdot (b_j)_{j=1}^{\infty}\right) &= T\left((a_j + \lambda \cdot b_j)_{j=1}^{\infty}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + \lambda \cdot b_j) \cdot y_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot y_j + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda \cdot b_j \cdot y_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot y_j + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot y_j \\
&= T\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) + \lambda \cdot T\left((b_j)_{j=1}^{\infty}\right).
\end{aligned}
$$

Mostremos que T é injetora. Seja $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $T\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = 0$ e observe que

$$
\begin{aligned}
T\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot y_j = (0, 0, \ldots) \\
&\Leftrightarrow \quad a_j \cdot \alpha_i = 0, \quad \forall\, i,\, j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Como $\alpha_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto $(a_j)_{j=1}^{\infty} \equiv 0$.

Assim, segue que $T(\ell_1)$ é subespaço de M e, como T é um operador injetor, segue que $\dim \ell_1 = \dim T(\ell_1)$, ou seja, $T(\ell_1)$ tem dimensão infinita. Como o fecho de um subespaço ainda é um subespaço, considere $\overline{T(\ell_1)} \subseteq M$ e vejamos que $\overline{T(\ell_1)} \subseteq E \cup \{0\}$, ou seja, $\overline{T(\ell_1)}$ é o espaço vetorial de dimensão infinita e fechado que procuramos em ambos os casos.

A fim de facilitar a compreensão e não sobrecarregar a notação, usaremos a decomposição de $\mathbb{N}$ feita no Exemplo 1.

Seja $z = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_1)}$ não nula. Então existem sequências $\left(a_n^k\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tais que $T\left(\left(a_n^k\right)_{n=1}^{\infty}\right) \longrightarrow (z_j)_{j=1}^{\infty}$ em M, quando k tende a infinito. Observe o seguinte diagrama de convergência:

$$\begin{array}{rcl}
T\left((a_n^1)_{n=1}^\infty\right) & = & (a_1^1\alpha_1, \quad a_1^1\alpha_2, \quad a_1^1\alpha_3, \quad a_2^1\alpha_1, \quad a_1^1\alpha_4, \quad a_2^1\alpha_2, \quad a_1^1\alpha_5, \quad a_3^1\alpha_1, \quad \ldots) \\
T\left((a_n^2)_{n=1}^\infty\right) & = & (a_1^2\alpha_1, \quad a_1^2\alpha_2, \quad a_1^2\alpha_3, \quad a_2^2\alpha_1, \quad a_1^2\alpha_4, \quad a_2^2\alpha_2, \quad a_1^2\alpha_5, \quad a_3^2\alpha_1, \quad \ldots) \\
T\left((a_n^3)_{n=1}^\infty\right) & = & (a_1^3\alpha_1, \quad a_1^3\alpha_2, \quad a_1^3\alpha_3, \quad a_2^3\alpha_1, \quad a_1^3\alpha_4, \quad a_2^3\alpha_2, \quad a_1^3\alpha_5, \quad a_3^3\alpha_1, \quad \ldots) \\
\vdots & & \\
T\left(\left(a_n^k\right)_{n=1}^\infty\right) & = & \left(a_1^k\alpha_1, \quad a_1^k\alpha_2, \quad a_1^k\alpha_3, \quad a_2^k\alpha_1, \quad a_1^k\alpha_4, \quad a_2^k\alpha_2, \quad a_1^k\alpha_5, \quad a_3^k\alpha_1, \quad \ldots\right) \\
\downarrow & & \quad\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \\
(z_j)_{j=1}^\infty & = & (z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_4, \quad z_5, \quad z_6, \quad z_7, \quad z_8, \quad \ldots)
\end{array}$$

Como $T\left(\left(a_n^k\right)_{n=1}^\infty\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z$ temos que $\left\|T\left(\left(a_n^k\right)_{n=1}^\infty\right) - z\right\|_m \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, onde a norma m representa a norma de ℓ_p ou ℓ_∞. Como a convergência em ℓ_p ou ℓ_∞ implica em convergência coordenada a coordenada, segue que as convergências das coordenadas apresentadas no diagrama acima de fato ocorrem em $\mathbb{K}$. Como $z \neq 0$ pelo menos uma das coordenadas de z é não nula. A título de ilustração, suponha que seja a primeira coordenada, isto é, $z_1 \neq 0$ (se for outra a coordenada não nula, o argumento é similar). Assim, $a_1^k\alpha_1 \to z_1$ quando $k \to \infty$. E como $z_1 \neq 0$, segue que $\alpha_1 \neq 0$. Logo, segue que $a_1^k \to \frac{z_1}{\alpha_1}$ quando $k \to \infty$. Olhando no diagrama apenas para as convergências nas coordenadas indexadas por $\mathbb{N}_1$, isto é, as coordenadas $1, 2, 3, 5, 7, \ldots$, note que a sequência dos termos a_1^k, $k \in \mathbb{N}$, aparece em todas elas. Mais precisamente, chamando $d_1 = \frac{z_1}{\alpha_1}$ temos

$$\left|a_1^k\alpha_1 - z_1\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_1^k\alpha_1 = z_1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \alpha_1 d_1;$$

$$\left|a_1^k\alpha_2 - z_2\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_1^k\alpha_2 = z_2 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \alpha_2 d_1;$$

$$\left|a_1^k\alpha_3 - z_3\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_1^k\alpha_3 = z_3 \quad \Rightarrow \quad z_3 = \alpha_3 d_1;$$

$$\left|a_1^k\alpha_4 - z_5\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_1^k\alpha_4 = z_5 \quad \Rightarrow \quad z_5 = \alpha_4 d_1;$$

$$\left|a_1^k\alpha_5 - z_7\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_1^k\alpha_5 = z_7 \quad \Rightarrow \quad z_7 = \alpha_5 d_1;$$

$$\vdots$$

Assim, considerando apenas a subsequência de z formada pelos termos indexados por $\mathbb{N}_1$, isto é, a subsequência $(z_1, z_2, z_3, z_5, z_7, \ldots)$, segue que

$$\begin{aligned} |z_1|^q + |z_2|^q + |z_3|^q + |z_5|^q + |z_7|^q + \cdots &= |\alpha_1 d_1|^q + |\alpha_2 d_1|^q + |\alpha_3 d_1|^q + |\alpha_4 d_1|^q + \cdots \\ &= |d_1|^q \cdot (|\alpha_1|^q + |\alpha_2|^q + |\alpha_3|^q + |\alpha_4|^q + \cdots) \\ &= |d_1|^q \, \|\alpha\|_q^q \\ &= \infty, \end{aligned}$$

e, portanto, $z \notin \ell_q$, no caso em que $E = \ell_p - \ell_q$. Ainda,

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3, z_5, z_7, \ldots) = (\alpha_1 d_1, \alpha_2 d_1, \alpha_3 d_1, \alpha_4 d_1, \ldots) &= d_1 \cdot (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \\ &= d_1 \alpha \notin c_0, \end{aligned}$$

ou seja, a subsequência $(z_1, z_2, z_3, z_5, z_7, \ldots)$ de z não converge para 0, logo $z \notin c_0$, no caso em que $E = \ell_\infty - c_0$.

Portanto $\overline{T(\ell_1)} \subseteq E \cup \{0\}$ em ambos os casos, ou seja, os conjuntos $\ell_p - \ell_q$ e $\ell_\infty - c_0$ são espaçáveis.

$\square$

Referências

[1] Aron, R. M.; Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability: the Search for Linearity in Mathematics*, Chapman and Hall/CRC, 2015.

[2] Aron, R. M.; Gurariy, V. I.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 795-803.

[3] Botelho, G.; Diniz, D.; Fávaro, V. V.; Pellegrino, D. *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 1255-1260.

[4] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, 2012.

[5] Cariello, D.; Fávaro, V. V.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Self-similar functions, fractals and algebraic genericity*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 4151-4159.

[6] Enderton, H. B. *Elements of Set Theory.* Academic Press, London, 1977.

[7] Lima, E. *Curso de Análise Vol. 1.* Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[8] Mujica, J. *Notas de Aula de Análise Funcional*, IMECC-UNICAMP, 2003.

[9] Muñoz-Fernández, G.A.; Palmberg, N.; Puglisi, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability in subsets of measure and function spaces*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2805-2812.